Úloha na limitu s třetí odmocninou

$$\textit{Spočtěte:}\ \lim_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n^3+n^2+1}-\sqrt[3]{n^3-1}).$$

Za využití vztahu $A-B=\frac{A^3-B^3}{A^2+AB+B^2}$ přepíšeme limitu jako

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{n^3+n^2+1}-\sqrt[3]{n^3-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^3+n^2+1)-(n^3-1)}{(n^3+n^2+1)^{2/3}+(n^3+n^2+1)^{1/3}(n^3-1)^{1/3}+(n^3-1)^{2/3}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2}{(n^3+n^2+1)^{2/3}+(n^3+n^2+1)^{1/3}(n^3-1)^{1/3}+(n^3-1)^{2/3}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2}\frac{1+\frac{2}{n^2}}{(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3})^{2/3}+(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3})^{1/3}(1-\frac{1}{n^3})^{1/3}+(1-\frac{1}{n^3})^{2/3}},$$

což je díky větě o aritmetice limit rovno (pokud limity ve zlomku existují a jejich součet je nenulový)

$$\frac{1}{\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3})^{2/3}+\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3})^{1/3}(1-\frac{1}{n^3})^{1/3}+\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n^3})^{2/3}}. \tag{1}$$

Platí jistě (VOAL) $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3})=1$ a $\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n^3})=1$. Zároveň jsou funkce $f(x)=x^{1/3}$ a $f(x)=x^{2/3}$ spojité v bodě 1, a tak platí dle Heineho věty

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3})^{1/3}=(\lim_{n\to\infty}[1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}])^{1/3}.$$

Obdobně samozřejmě pro výraz $1-\frac{1}{n^3}$ a také pro mocninu 2/3. Z toho tedy plyne , že zlomek (1) je roven

$$\frac{1}{(\lim_{n\to\infty}[1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}])^{2/3}+(\lim_{n\to\infty}[1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}][1-\frac{1}{n^3}])^{1/3}+(\lim_{n\to\infty}[1-\frac{1}{n^3}])^{2/3}}=$$

$$=\frac{1}{(1)^{2/3}+([1]\cdot[1])^{1/3}+(1)^{2/3}}=\frac{1}{3}.$$

V předposlední rovnosti jsme opět použili VOAL.